Научная статья
УДК 517.955
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-26-39

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Лина Николаевна Бондарь[1], Санжар Баходир угли Мингнаров[2]

[1,2]Новосибирский государственный университет
630090, Новосибирск, Россия

[1]l.bondar@g.nsu.ru,[2]s.mingnarov@g.nsu.ru

Аннотация

Рассматривается задача Коши для одной псевдогиперболической системы. Эта система возникает при моделировании изгибно-крутильных колебаний упругого стержня. В работе указываются необходимые условия на правую часть системы, при которых задача Коши разрешима в соболевском пространстве с экспоненциальным весом.

Ключевые слова и фразы

псевдогиперболическая система, задача Коши, анизотропное соболевское пространство, необходимые условия разрешимости.

Источник финансирования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370, https://rscf.ru/project/24-21-00370/)

Для цитирования

Бондарь Л. Н., Мингнаров С. Б. О необходимых условиях разрешимости для одной псевдогиперболической системы // Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 26-39. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-26-39

ON NECESSARY SOLVABILITY CONDITIONS FOR ONE PSEUDOHYPERBOLIC SYSTEM

Lina N. Bondar[1], Sanjar B. Mingnarov[2]

[1,2]Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

[1]l.bondar@g.nsu.ru,[2]s.mingnarov@g.nsu.ru

Abstract

The Cauchy problem for one pseudohyperbolic system is considered. This system arises when modeling flexural-torsional vibrations of an elastic rod. The paper indicates the necessary conditions on the right side of the system under which the Cauchy problem is solvable in a Sobolev space with exponential weight.

Keywords

pseudohyperbolic system, Cauchy problem, anisotropic Sobolev space, necessary conditions for solvability.

Funding

The study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-21-00370, https://rscf.ru/project/24-21-00370/

For citation

Bondar L. N., Mingnarov S. B. On necessary solvability conditions for one pseudohyperbolic system // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 2, pp. 26-39. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-26-39

§ 1. Введение и постановка задачи

В работе исследуется система (см. [1]), не разрешенная относительно старшей производной:

$$\begin{pmatrix} I - D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 U + \sigma^2 D_x^4 U = F(t,x). \tag{1.1}$$

Рассматриваемая система относится к классу псевдогиперболических систем. Класс псевдогиперболических уравнений и систем был введен в монографии [2]. В этой монографии была изучена разрешимость задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений в соболевских пространствах.

Дальнейшие исследования разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений проводились в [3–6] и др. Для псевдогиперболических систем общей теории разрешимости задачи Коши нет. В литературе разрешимость задачи Коши изучается для конкретных систем (см., например, [7, 8] и др.).

В данной работе мы продолжаем исследования [9] задачи Коши для системы (1.1). Система (1.1) имеет два параметра ε_1, ε_2, которые влияют на результат о разрешимости задачи Коши. В случае $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 = 0$ система (1.1) распадается на три псевдогиперболических уравнения и разрешимость задачи Коши для таких уравнений следует из работы [4]. В работе [9] рассматривается случай $0 < \varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2 < 1$ и показывается, что задача Коши для системы (1.1) имеет единственное решение такое, что $e^{-\gamma t}U(t,x) \in W_2^{2,4}$, $\gamma > 0$, при $e^{-\gamma t}F(t,x) \in W_2^{0,1}$. Отметим, что, как и для псевдогиперболических уравнений, для разрешимости псевдогиперболических систем возникают условия дополнительной гладкости на правую часть системы. В [10] изучен случай, когда $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 1$. В этой работе указываются достаточные условия на правую часть системы (эти условия имеют вид условий ортогональности правой части некоторым полиномам), при которых задача Коши для системы (1.1) разрешима в соболевском пространстве.

Цель работы — показать, что условия на правую часть системы (1.1), указанные в [10] являются необходимыми для разрешимости задачи Коши в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}$.

§ 2. Разрешимость задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для псевдогиперболической системы:

$$\begin{pmatrix} I - D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 U + \sigma^2 D_x^4 U = F(t,x), \quad t > 0,\, x \in R,$$

$$U|_{t=0} = 0, \quad D_t U|_{t=0} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$U(t,x) = (u(t,x), v(t,x), \theta(t,x))^T, \quad F(t,x) = \left(f^1(t,x), f^2(t,x), f^3(t,x)\right)^T,$$

$\sigma \neq 0$, при этом $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 1$.

Дадим определения анизотропных соболевских пространств, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 1. Функция $u(t,x) \in L_2(G)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{l_1,l_2}(G)$, $G \subseteq R^2$, l_1, $l_2 \in N$, если существуют обобщенные производные

$$D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x), \quad \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1,$$

в области G, при этом $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x) \in L_2(G)$. Введем норму

$$\|u, W_2^{l_1,l_2}(G)\| = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2):\alpha_1/l_1+\alpha_2/l_2 \leq 1} \|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u, L_2(G)\|.$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 26-39
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 26-39

Определение 2. Функция $u(t,x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству с экспоненциальным весом $W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t}u(t,x) \in W^{l_1,l_2}_2(G)$. Полагаем

$$\|u(t,x), W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)\| = \|e^{-\gamma t}u(t,x), W^{l_1,l_2}_2(G)\|.$$

Определение 3. Функция $f(t,x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W^{0,1}_{2,\gamma}(G)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t}f(t,x) \in L_2(G)$, существует обобщенная производная $D_x f(t,x)$ в G, при этом $e^{-\gamma t}D_x f(t,x) \in L_2(G)$. Полагаем

$$\|f(t,x), W^{0,1}_{2,\gamma}(G)\| = \|e^{-\gamma t}f(t,x), L_2(G)\| + \|e^{-\gamma t}D_x f(t,x), L_2(G)\|.$$

Будем говорить, что $V(t,x) = (v^1(t,x), v^2(t,x), v^3(t,x))^T \in W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)$, если $v^j(t,x) \in W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)$, $j = 1,2,3$. Полагаем

$$\|V(t,x), W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)\| = \sum_{j=1}^{3} \|v^j(t,x), W^{l_1,l_2}_{2,\gamma}(G)\|.$$

Приведем формулировку теоремы, доказанную в [10].

Теорема 1. *Пусть вектор-функция* $F(t,x) = (f^1(t,x), f^2(t,x), f^3(t,x))^T \in W^{0,1}_{2,\gamma}(R^2_+)$, $\gamma > 0$, *такая, что*

$$(1+x^2)F(t,x) \in L_{2,\gamma}(R_+; L_1(R))$$

и выполнены условия:

$$\varepsilon_1 \int\limits_R f^1(t,x)\,dx - \varepsilon_2 \int\limits_R f^2(t,x)\,dx - \int\limits_R f^3(t,x)\,dx = 0, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_1 \int\limits_R x f^1(t,x)\,dx - \varepsilon_2 \int\limits_R x f^2(t,x)\,dx - \int\limits_R x f^3(t,x)\,dx = 0, \quad t > 0. \tag{2.3}$$

Тогда задача Коши (2.1) имеет единственное решение $U(t,x)$ *в пространстве вектор-функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+), \gamma > 0$, *таких, что* $D^2_t D^2_x U \in L_{2,\gamma}(R^2_+)$, *при этом справедлива оценка:*

$$\|U(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+)\| + \|D^2_t D^2_x U(t,x), L_{2,\gamma}(R^2_+)\|$$

$$\leq c(\gamma)\Big(\|F(t,x), W^{0,1}_{2,\gamma}(R^2_+)\| + \|\|(1+x^2)F(t,x), L_1(R)\|, L_{2,\gamma}(R_+)\|\Big),$$

где $c(\gamma)$ — *константа, зависящая от коэффициентов системы и* γ.

В следующей теореме мы покажем, что условия (2.2), (2.3) являются и необходимыми для разрешимости задачи Коши (2.1) в соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+)$.

Теорема 2. *Пусть* $F(t,x) = (f^1(t,x), f^2(t,x), f^3(t,x))^T \in C_0^\infty(R^2_+)$. *Тогда для разрешимости задачи Коши (2.1) в* $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+)$, $\gamma > 0$, *необходимо выполнение условий (2.2), (2.3).*

Доказательство. Предположим противное, пусть условие (2.2) или (2.3) не выполнено, но решение задачи Коши (2.1) $U(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+), \gamma > 0$, при этом $D_t^2 D_x^2 U(t,x) \in L_{2,\gamma}(R^2_+)$. Следовательно,

$$\|U(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_+)\| + \|D_t^2 D_x^2 U(t,x), L_{2,\gamma}(R^2_+)\| \leq c(F) < \infty,$$

где $c(F)$ — константа, зависящая от $F(t,x)$. Применим к вектор-функции $U(t,x)$ оператор преобразования Фурье по x, тогда вектор-функция $V(t,\xi) = F[U](t,\xi)$, является решением задачи Коши

$$\begin{pmatrix} 1+\xi^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1+\xi^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 1+\xi^2 \end{pmatrix} D_t^2 V + \sigma^2 \xi^4 V = \widehat{F}(t,\xi), \quad t > 0,\, \xi \in R, \tag{2.4}$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad D_t V|_{t=0} = 0,$$

где $\widehat{F}(t,\xi)$ — преобразование Фурье вектор-функции $F(t,x)$ по x. В силу равенства Парсеваля имеем

$$\|V(t,\xi), L_{2,\gamma}(R^2_+)\| + \|\xi V(t,\xi), L_{2,\gamma}(R^2_+)\| \leq c(F) < \infty. \tag{2.5}$$

При $\xi \in R\backslash\{0\}$ решение задачи (2.4) можно представить в следующем виде:

$$V(t,\xi) = \int\limits_0^t \Bigg(B_1 \frac{\sin(b_1(\xi)(t-s))}{b_1(\xi)}$$

$$+ B_2 \frac{\sin(b_2(\xi)(t-s))}{b_2(\xi)} + B_3 \frac{\sin(b_3(\xi)(t-s))}{b_3(\xi)} \Bigg) G(s,\xi)\, ds. \tag{2.6}$$

Здесь

$$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_2^2 & \varepsilon_1^2 & 0 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & 1-\varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1(\xi) = \frac{\sigma\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}},$$

$$2B_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix},\ b_2(\xi) = \sigma|\xi|,$$

$$2B_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix},\ b_3(\xi) = \frac{\sigma\xi^2}{\sqrt{2+\xi^2}}, \tag{2.7}$$

$$G(t,\xi) = (L^0(i\xi))^{-1}\widehat{F}(t,\xi)$$

$$= \begin{pmatrix} (1+\xi^2)^2-\varepsilon_2^2 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_1(1+\xi^2) \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 & (1+\xi^2)^2-\varepsilon_1^2 & \varepsilon_2(1+\xi^2) \\ -\varepsilon_1(1+\xi^2) & \varepsilon_2(1+\xi^2) & (1+\xi^2)^2 \end{pmatrix} \frac{\widehat{F}(t,\xi)}{\xi^2(1+\xi^2)(2+\xi^2)}.$$

Представим вектор-функцию $G(t,\xi)$ в виде:

$$G(t,\xi) = G_1(t,\xi) + G_2(t,\xi), \tag{2.8}$$

$$G_1(t,\xi) = \begin{pmatrix} 2+\xi^2 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 2+\xi^2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 2+\xi^2 \end{pmatrix} \frac{\widehat{F}(t,\xi)}{(1+\xi^2)(2+\xi^2)},$$

$$G_2(t,\xi) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \frac{\widehat{F}(t,\xi)}{\xi^2(1+\xi^2)(2+\xi^2)}.$$

В силу (2.5)

$$\|\|\xi V(t,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\|, L_{2,\gamma}(R_+)\| \le c(F), \quad 0<\delta<1.$$

Учитывая формулу решения (2.6), свойство преобразования Фурье свёртки, получим

$$\|\|\xi V(t,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\|, L_{2,\gamma}(R_+)\|$$

$$= \left\|\left\|\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s)e^{-\gamma(t-s)} \sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\sin(b_j(\xi)(t-s))}{b_j(\xi)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times G(s,\xi)\theta(s)e^{-\gamma s}ds, L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(R)\right\|$$

$$= \left\|\left\|\xi \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(i\eta+\gamma)t} \sum_{j=1}^{3} B_j \frac{\sin(b_j(\xi)t)}{b_j(\xi)} dt\widehat{G}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(R)\right\| \le c(F),$$

где $G_\gamma(t,\xi) = e^{-\gamma t}\theta(t)G(t,\xi)$. Учитывая

$$\int\limits_0^\infty e^{-(i\eta+\gamma)t}\frac{\sin(b_j(\xi)t)}{b_j(\xi)}dt = \frac{1}{(i\eta+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}, \quad j=1,2,3,$$

получим

$$\left\|\left\|\xi\sum_{j=1}^{3}\frac{B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(R)\right\| \le c(F). \quad (2.9)$$

Здесь $\widehat{G}_\gamma(\eta,\xi)$ — преобразование Фурье вектор-функции $G_\gamma(t,\xi)$ по t. Представим $G_\gamma(t,\xi)$ в виде $G_\gamma(t,\xi) = G_{1,\gamma}(t,\xi) + G_{2,\gamma}(t,\xi)$, где $G_{j,\gamma}(t,\xi) = e^{-\gamma t}\theta(t)G_j(t,\xi)$, $j=1,2$, функции $G_j(t,\xi)$ определены в (2.8). Имеем

$$\widehat{G}_\gamma(\eta,\xi) = \widehat{G}_{1,\gamma}(\eta,\xi) + \widehat{G}_{2,\gamma}(\eta,\xi).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_{2,\gamma}(\eta,\xi)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\frac{B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_\gamma(\eta,\xi) - \sum_{j=1}^{3}\frac{B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_{1,\gamma}(\eta,\xi).$$

В силу неравенств Минковского и (2.9) имеем

$$\left\|\left\|\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_{2,\gamma}(\eta,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(R)\right\|$$

$$\le \left\|\left\|\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_\gamma(\eta,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(R)\right\|$$

$$+ \left\|\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_{1,\gamma}(\eta,\xi), L_2(R^2)\right\| \le c(F) + I_1, \quad (2.10)$$

где

$$I_1 = \left\|\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi B_j}{(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_{1,\gamma}(\eta,\xi), L_2(R^2)\right\|.$$

Поскольку

$$|(in+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2| \ge c_1\gamma\sqrt{\eta^2+\gamma^2+(b_j(\xi))^2} \ge c_1\gamma^2, \quad \gamma>0, \quad (\eta,\xi)\in R^2,$$

$c_1 > 0$ — константа, учитывая явный вид $G_1(t,\xi)$, равенство Парсеваля, будем иметь

$$I_1 \le \frac{c_2}{\gamma^2}\left\|\sum_{j=1}^{3} B_j G_1(t,\xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\right\| \le c_3(F) < \infty, \tag{2.11}$$

где $c_3(F) > 0$ — константа, не зависящая от δ.

Таким образом, принимая во внимание, (2.10), (2.11), получим

$$\|\|\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi B_j}{(i\eta+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_{2,\gamma}(\eta,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\|$$

$$\le c(F) + c_3(F), \quad \alpha > 0. \tag{2.12}$$

Обозначим через

$$\omega(\eta,\xi) = \sum_{j=1}^{3}\frac{B_j}{(i\eta+\gamma)^2+(b_j(\xi))^2}\widehat{G}_{2,\gamma}(\eta,\xi) = \begin{pmatrix}\omega^1(\eta,\xi)\\ \omega^2(\eta,\xi)\\ \omega^3(\eta,\xi)\end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

В силу обозначения $\widehat{G}_{2,\gamma} = \left(\widehat{G}^1_{2,\gamma}, \widehat{G}^2_{2,\gamma}, \widehat{G}^3_{2,\gamma}\right)^T$ и учитывая определение B_j из (2.7), будем иметь

$$\omega^3(\eta,\xi) = \frac{-\varepsilon_1\widehat{G}^1_{2,\gamma}+\varepsilon_1\widehat{G}^2_{2,\gamma}+\widehat{G}^3_{2,\gamma}}{2((i\eta+\gamma)^2+(b_2(\xi))^2)} + \frac{\varepsilon_1\widehat{G}^1_{2,\gamma}-\varepsilon_1\widehat{G}^2_{2,\gamma}+\widehat{G}^3_{2,\gamma}}{2((i\eta+\gamma)^2+(b_3(\xi))^2)}.$$

Поскольку

$$G_2(t,\xi) = \begin{pmatrix}\varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1\varepsilon_2 & -\varepsilon_1\\ -\varepsilon_1\varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2\\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 1\end{pmatrix}\frac{\widehat{F}(t,\xi)}{\xi^2(1+\xi^2)(2+\xi^2)}$$

$$= \begin{pmatrix}G_2^1(t,\xi)\\ G_2^2(t,\xi)\\ G_2^3(t,\xi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\varepsilon_1 G_2^1(t,\xi)\\ \varepsilon_2 G_2^2(t,\xi)\\ G_2^3(t,\xi)\end{pmatrix},$$

где

$$G_2^3(t,\xi) = \frac{-\varepsilon_1\widehat{f}^1(t,\xi)+\varepsilon_2\widehat{f}^2(t,\xi)+\widehat{f}^3(t,\xi)}{\xi^2(1+\xi^2)(2+\xi^2)},$$

имеем

$$\omega^3(\eta,\xi) = h(\eta,\xi)\widehat{G}^3_{2,\gamma}(\eta,\xi), \tag{2.14}$$

где

$$h(\eta,\xi)$$

$$= \frac{(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+1)((i\eta+\gamma)^2+b_3^2(\xi))+(1-\varepsilon_1^2-\varepsilon_1\varepsilon_2)((i\eta+\gamma)^2+b_2^2(\xi))}{2((i\eta+\gamma)^2+b_2^2(\xi))((i\eta+\gamma)^2+b_3^2(\xi))}$$

$$= \frac{2(i\eta+\gamma)^2+(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+1)b_3^2(\xi)+(1-\varepsilon_1^2-\varepsilon_1\varepsilon_2)b_2^2(\xi)}{2((i\eta+\gamma)^2+b_2^2(\xi))((i\eta+\gamma)^2+b_3^2(\xi))},$$

функция $\widehat{G}^3_{2,\gamma}(\eta,\xi)$ — преобразование Фурье по t функции $G^3_{2,\gamma}(t,\xi) = e^{-\gamma t}\theta(t)G_2^3(t,\xi)$.

Зафиксируем γ, пусть $\gamma=\gamma_0>0$, $\alpha<\eta<\beta$, $\xi<1$, получим

$$|h(\eta,\xi)| = \frac{\sqrt{4\eta^2\gamma^2+\left(\gamma^2-\eta^2+(\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+1}{2})b_3^2+(\frac{1-\varepsilon_1^2-\varepsilon_1\varepsilon_2}{2})b_2^2)\right)^2}}{|(i\eta+\gamma)^2+b_2^2(\xi)||(i\eta+\gamma)^2+b_3^2(\xi)|}$$

$$\geq \frac{2c_1|\eta|\gamma}{(\eta^2+\gamma_0^2+b_2^2(\xi))(\eta^2+\gamma_0^2+b_3^2(\xi))} \geq \frac{2\alpha\gamma_0}{(\beta^2+\gamma_0^2+\sigma^2)^2}. \qquad (2.15)$$

Принимая во внимание (2.12)–(2.15), будем иметь

$$\frac{2\alpha\gamma_0}{(\beta^2+\gamma_0^2+\sigma^2)^2}\left\|\left\|\xi\widehat{G}^3_{2,\gamma_0}(\eta,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\right\| \leq c(F)+c_3(F).$$

Обозначим через

$$g(t,\xi) = e^{-\gamma_0 t}\theta(t)(-\varepsilon_1\widehat{f}^1(t,\xi)+\varepsilon_2\widehat{f}^2(t,\xi)+\widehat{f}^3(t,\xi)).$$

Тогда

$$\widehat{G}^3_{2,\gamma_0}(\eta,\xi) = \frac{\widehat{g}(\eta,\xi)}{\xi^2(1+\xi^2)(2+\xi^2)},$$

где $\widehat{g}(\eta,\xi)$ — преобразование Фурье функции $g(t,\xi)$ по t. Имеем

$$\left\|\left\|\frac{\xi\widehat{g}(\eta,\xi)}{\xi^2(1+\xi^2)(2+\xi^2)}, L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\right\| \leq c_4(F)<\infty, \qquad (2.16)$$

где $c_4(F)>0$ — константа, не зависящая от δ.

Представим $\widehat{g}(\eta,\xi)$ в виде:

$$\widehat{g}(\eta,\xi) = \widehat{g}(\eta,0)+\xi\int_0^1 D_\tau\widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=\lambda\xi}\,d\lambda.$$

Тогда

$$\widehat{g}(\eta,0) = \widehat{g}(\eta,\xi)-\xi\int_0^1 D_\tau\widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=\lambda\xi}\,d\lambda,$$

и
$$\left\|\left\|\frac{\widehat{g}(\eta,0)}{\xi(1+\xi^2)(2+\xi^2)}, L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\right\| \le c_4(F)$$

$$+\left\|\left\|\frac{1}{(1+\xi^2)(2+\xi^2)}\int\limits_0^1 D_\tau \widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=\lambda\xi}\,d\lambda, L_2(R)\right\|, L_2(R)\right\| \le c_5(F)<\infty.$$

Имеем

$$\left\|\widehat{g}(\eta,0)\left\|\frac{1}{\xi}, L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\right\| \le c_6(F)<\infty,$$

где $c_6(F)>0$ — константа, не зависящая от δ. Поскольку

$$\left\|\frac{1}{\xi}, L_2(\delta<\xi<1)\right\| \to \infty$$

при $\delta\to 0$, то с необходимостью должно выполняться следующее равенство

$$\widehat{g}(\eta,0)=0 \tag{2.17}$$

для почти всех $\eta\in R$ (в силу произвольности интервала (α,β)).

Проводя аналогичные рассуждения для вектор-функции $V(t,\xi)$, опираясь на справедливость оценки

$$\left\|\left\|V(t,\xi), L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(R^+)\right\| \le c(F)<\infty,$$

получим оценку, подобную (2.16),

$$\left\|\left\|\frac{\widehat{g}(\eta,\xi)}{\xi^2(1+\xi^2)(2+\xi^2)}, L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\right\| \le c_7(F). \tag{2.18}$$

Перепишем $\widehat{g}(\eta,\xi)$, учитывая (2.17), как

$$\widehat{g}(\eta,\xi)=\widehat{g}(\eta,\xi)-\widehat{g}(\eta,0)=\xi\int\limits_0^1 D_{\tau_1}\widehat{g}(\eta,\tau_1)|_{\tau_1=\lambda_1\xi}\,d\lambda_1$$

$$=\xi\int\limits_0^1\Big[D_\tau\widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=\lambda_1\xi}-D_\tau\widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=0}\Big]\,d\lambda_1+\xi\, D_\tau\widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=0}$$

$$=\xi^2\int\limits_0^1\lambda_1\int\limits_0^1 D^2_{\tau_2}\widehat{g}(\eta,\tau_2)\big|_{\tau_2=\lambda_1\lambda_2\xi}\,d\lambda_2 d\lambda_1+\xi\, D_\tau\widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=0}\,.$$

Получим

$$\xi\, D_\tau \widehat{g}(\eta,\tau)\big|_{\tau=0} = \widehat{g}(\eta,\xi) - \xi^2 \int\limits_0^1 \lambda_1 \int\limits_0^1 D^2_{\tau_2}\widehat{g}(\eta,\tau_2)\big|_{\tau_2=\lambda_1\lambda_2\xi}\, d\lambda_2 d\lambda_1.$$

Учитывая (2.18), будем иметь

$$\left\|\left\|\frac{D_\tau \widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=0}}{\xi(1+\xi^2)(2+\xi^2)}, L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\right\|$$

$$\le c_7(F) + \left\|\frac{\int\limits_0^1 \lambda_1 \int\limits_0^1 D^2_{\tau_2}\widehat{g}(\eta,\tau_2)\big|_{\tau_2=\lambda_1\lambda_2\xi} d\lambda_2 d\lambda_1}{(1+\xi^2)(2+\xi^2)}, L_2(R^2)\right\| \le c_8(F) < \infty.$$

Следовательно,

$$\left\| |D_\tau \widehat{g}(\eta,\tau)|_{\tau=0}\left\|\frac{1}{\xi}, L_2(\delta<\xi<1)\right\|, L_2(\alpha<\eta<\beta)\right\| \le c_9(F) < \infty, \qquad (2.19)$$

$c_9(F) > 0$ — константа, не зависящая от δ.

При $\delta \to 0$ норма $\left\|\frac{1}{\xi}, L_2(\delta<\xi<1)\right\| \to \infty$, учитывая (2.19), с необходимостью должно выполняться равенство

$$D_\tau \widehat{g}(\eta,\tau)\big|_{\tau=0} = 0 \qquad (2.20)$$

для почти всех $\alpha < \eta < \beta$, но α, β — произвольные, следовательно, для почти всех $\eta \in R$.

В (2.17), (2.20), применяя обратное преобразование Фурье по η, получаем, что должны быть выполнены (2.2) и (2.3), но это противоречит нашему предположению.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни.* 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Физматгиз, 1959.

2. *Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Новосибирск: Научная книга, 1998.

3. *Fedotov I., Volevich L.V.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // *Russ. J. Math. Phys.* 2006. V. 13, N 3. P. 278–292.

4. *Демиденко Г.В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // *Сиб. мат. журн.* 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.

5. *Умаров Х. Г.* Задача Коши для уравнения крутильных колебаний нелинейно-упругого стержня бесконечной длины // *Прикладная математика и механика.* 2019. Т. 83, № 2. С. 249–264.

6. *Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В.* О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // *Сиб. мат. журн.* 2023. Т. 64, № 5. С. 895–911.

7. *Герасимов С. И., Ерофеев В. И. Задачи волновой динамики элементов конструкций.* Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2014.

8. *Bondar L.N., Demidenko G.V.* Solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic system // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. V. 66, N 6-7. P. 1084–1099.

9. *Бондарь Л.Н., Мингнаров С.Б.* О задаче Коши для одной системы псевдогиперболического типа // Математические заметки СВФУ. 2023. Т. 30. № 4. С. 3–11.

10. *Бондарь Л.Н., Мингнаров С.Б.* Об условиях разрешимости задачи Коши для одной псевдогиперболической системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64, № 8. (принята к печати)

References

1. *Vlasov V.Z., Thin-walled Elastic Beams.* National Science Foundation, Washington, D.C., 1961.

2. *Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, Russia, 1998; English transl. Marcel Dekker, New York and Basel, 2003.

3. *Fedotov I., Volevich L.V.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // *Russ. J. Math. Phys.* 2006. V. 13, N 3. P. 278–292.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 26-39
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 26-39

4. *Demidenko G.V.* Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // *Sib. Math. J.* 2015. V. 56, N 6. P. 1028–1041.

5. *Umarov Kh.G.* Cauchy problem for the torsional vibration equation of a nonlinear-elastic rod of infinite length // *Mech. Sol.*. 2019. V. 54, N 5. P. 726–740.

6. *Bondar L.N., Demidenko G.V.* On well-posedness of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations in weighted Sobolev spaces // *Sib. Math. J*, 2023. V. 64, N 5. P. 1076–1090.

7. *Gerasimov S.I., Erofeev V.I. Problems of wave dynamics for structural elements* [in Russian]. Ross. Fed. Yad. Tsentr-Vseross. Nauchn.-Issled. Inst. Eksp. Fiz., Sarov, 2014.

8. *Bondar L.N., Demidenko G.V.* Solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic system // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. V. 66, N 6-7. P. 1084–1099.

9. *Bondar L.N., Mingnarov S.B.* On the Cauchy problem for one system of pseudohyperbolic type // *Mathematical notes of NEFU.* 2023. V. 30, N 4. P. 3–11.

10. *Bondar L.N., Mingnarov S.B.* On solvability conditions for one pseudohyperbolic system // *Comput. Math. Math. Phys.,*. 2024. V. 64, N 8. (accepted for publication)

Информация об авторах

Лина Николаевна Бондарь, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN-код: 7367-8790, AuthorID: 493872
Scopus Author ID 22633505200

Санжар Баходир угли Мингнаров, аспирант

Author Information

Lina N. Bondar, Candidate of Physical and Mathematical Sciences Associate Professor
SPIN-код: 7367-8790, AuthorID: 493872

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 26-39
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 26-39

Scopus Author ID 22633505200
Sanjar B. Mingnarov, graduate student

Статья поступила в редакцию 10.06.2024;
одобрена после рецензирования 11.06.2024; принята к публикации 13.06.2024

The article was submitted 10.06.2024;
approved after reviewing 11.06.2024; accepted for publication 13.06.2024